

Programske paradigme — Lambda račun, vežba

1. Izvesti normalni oblik primenom odgovarajućih redukcija na termove (prikazati postupak):

(a)  $(\lambda k.k \cdot k + 1)((\lambda j.j + 1)2) \rightarrow (\lambda k.k \cdot k + 1)(2 + 1) \rightarrow (\lambda k.k \cdot k + 1)3 \rightarrow (3 \cdot 3 + 1) \rightarrow 10$

(b)  $(\lambda m.2 \cdot m + 3)((\lambda n.n - 2)10) \rightarrow (\lambda m.2 \cdot m + 3)(10 - 2) \rightarrow (\lambda m.2 \cdot m + 3)8 \rightarrow (2 \cdot 8 + 3) \rightarrow 19$

(c)  $(\lambda k.k (k 10))(\lambda x.x - 2) \rightarrow (\lambda x.x - 2)((\lambda x.x - 2)10) \rightarrow (\lambda x.x - 2)(10 - 2) \rightarrow (\lambda x.x - 2)8 \rightarrow 8 - 2 \rightarrow 6$

(d)  $(\lambda p.p (p (p 10)))(\lambda q.q + 1) \rightarrow (\lambda q.q + 1)((\lambda q.q + 1)((\lambda q.q + 1)10)) \rightarrow (\lambda q.q + 1)((\lambda q.q + 1)(10 + 1)) \rightarrow$   
 $(\lambda q.q + 1)((\lambda q.q + 1)11) \rightarrow (\lambda q.q + 1)(11 + 1) \rightarrow (\lambda q.q + 1)12 \rightarrow 12 + 1 \rightarrow 13$

(e)  $((\lambda kmn.k \cdot m + n)2)3 \rightarrow ((\lambda k.(\lambda mn.k \cdot m + n))2)3 \rightarrow (\lambda mn.2 \cdot m + n)3 \rightarrow (\lambda m.(\lambda n.2 \cdot m + n))3 \rightarrow$   
 $(\lambda n.2 \cdot 3 + n) \rightarrow (\lambda n.6 + n)$

(f)  $((\lambda ijk.i \cdot j + k)2)3)4 \rightarrow (((\lambda i.(\lambda jk.i \cdot j + k))2)3)4 \rightarrow ((\lambda jk.2 \cdot j + k)3)4 \rightarrow ((\lambda j.(\lambda k.2 \cdot j + k))3)4 \rightarrow$   
 $(\lambda k.2 \cdot 3 + k)4 \rightarrow 2 \cdot 3 + 4 \rightarrow 10$

(g)  $(\lambda x.10)((\lambda x.x x)(\lambda x.x x)) \rightarrow (\lambda x.10)((\lambda x.x x)(\lambda x.x x)) \rightarrow 10$

(h)  $(\lambda k.k \cdot k + 1)((\lambda j.j + 1)((\lambda x.10)((\lambda x.x x)(\lambda x.x x)))) \rightarrow (\lambda k.k \cdot k + 1)((\lambda j.j + 1)10) \rightarrow (\lambda k.k \cdot k + 1)(10 + 1) \rightarrow$   
 $(\lambda k.k \cdot k + 1)11 \rightarrow 11 \cdot 11 + 1 \rightarrow 122$

(i)  $(\lambda x.x (x 5))((\lambda ab.a + 2 \cdot b)3) \rightarrow (\lambda x.x (x 5))(\lambda b.3 + 2 \cdot b) \rightarrow (\lambda b.3 + 2 \cdot b)((\lambda b.3 + 2 \cdot b)5) \rightarrow (\lambda b.3 + 2 \cdot b)(3 + 2 \cdot 5)$   
 $\rightarrow (\lambda b.3 + 2 \cdot b)13 \rightarrow 3 + 2 \cdot 13 \rightarrow 29$

(j)  $(\lambda x.x (x 1))(((\lambda abc.a + b \cdot c)2)4) \rightarrow (\lambda x.x (x 1))((\lambda bc.2 + b \cdot c)4) \rightarrow (\lambda x.x (x 1))(\lambda c.2 + 4 \cdot c) \rightarrow$   
 $(\lambda c.2 + 4 \cdot c)((\lambda c.2 + 4 \cdot c)1) \rightarrow (\lambda c.2 + 4 \cdot c)(2 + 4 \cdot 1) \rightarrow (\lambda c.2 + 4 \cdot c)6 \rightarrow 2 + 4 \cdot 6 \rightarrow 26$

(k)  $(\lambda x.x (x 1))(((\lambda abcd.a + b \cdot c - d)2)4)1) \rightarrow (\lambda x.x (x 1))(((\lambda bcd.2 + b \cdot c - d)4)1) \rightarrow$   
 $(\lambda x.x (x 1))((\lambda cd.2 + 4 \cdot c - d)1) \rightarrow (\lambda x.x (x 1))(\lambda d.2 + 4 \cdot 1 - d) \rightarrow (\lambda d.6 - d)((\lambda d.6 - d)1) \rightarrow$   
 $(\lambda d.6 - d)(6 - 1) \rightarrow (\lambda d.6 - d)5 \rightarrow 6 - 5 \rightarrow 1$

2. Izvesti normalni oblik primenom redukcija u **normalnom poretku** na termove (prikazati postupak):

$$(a) (\lambda k.k \cdot k + 1)((\lambda j.j + 1)2) \rightarrow ((\lambda j.j + 1)2) \cdot ((\lambda j.j + 1)2) + 1 \rightarrow (2 + 1) \cdot (2 + 1) + 1 \rightarrow 3 \cdot 3 + 1 \rightarrow 10$$

$$(b) (\lambda m.2 \cdot m + 3)((\lambda n.n - 2)10) \rightarrow 2 \cdot ((\lambda n.n - 2)10) + 3 \rightarrow 2 \cdot (10 - 2) + 3 \rightarrow 2 \cdot 8 + 3 \rightarrow 19$$

$$(c) (\lambda k.k (k 10))(\lambda x.x - 2) \rightarrow (\lambda x.x - 2)((\lambda x.x - 2)10) \rightarrow ((\lambda x.x - 2)10) - 2 \rightarrow (10 - 2) - 2 \rightarrow 6$$

$$(d) (\lambda p.p (p (p 10)))(\lambda q.q + 1) \rightarrow (\lambda q.q + 1)((\lambda q.q + 1)((\lambda q.q + 1)10)) \rightarrow (\lambda q.q + 1)((\lambda q.q + 1)10) + 1 \rightarrow ((\lambda q.q + 1)10) + 1 + 1 \rightarrow ((10 + 1) + 1) + 1 \rightarrow 13$$

$$(e) ((\lambda kmn.k \cdot m + n)2)3 \rightarrow (\lambda mn.2 \cdot m + n)3 \rightarrow \lambda n.2 \cdot 3 + n \rightarrow \lambda n.6 + n$$

$$(f) (((\lambda ijk.i \cdot j + k)2)3)4 \rightarrow ((\lambda jk.2 \cdot j + k)3)4 \rightarrow (\lambda k.2 \cdot 3 + k)4 \rightarrow (2 \cdot 3 + 4) \rightarrow 6 + 4 \rightarrow 10$$

$$(g) (\lambda x.10)((\lambda x.x x)(\lambda x.x x)) \rightarrow 10$$

$$(h) (\lambda k.k \cdot k + 1)((\lambda j.j + 1)((\lambda x.10)((\lambda x.x x)(\lambda x.x x)))) \rightarrow ((\lambda j.j + 1)((\lambda x.10)((\lambda x.x x)(\lambda x.x x)))) \cdot ((\lambda j.j + 1)((\lambda x.10)((\lambda x.x x)(\lambda x.x x)))) + 1 \rightarrow (((\lambda x.10)((\lambda x.x x)(\lambda x.x x))) + 1) \cdot (((\lambda x.10)((\lambda x.x x)(\lambda x.x x))) + 1) + 1 \rightarrow (10 + 1) \cdot (10 + 1) + 1 \rightarrow 11 \cdot 11 + 1 \rightarrow 122$$

$$(i) (\lambda x.x (x 5))((\lambda ab.a + 2 \cdot b)3) \rightarrow ((\lambda ab.a + 2 \cdot b)3)((\lambda ab.a + 2 \cdot b)3)5 \rightarrow (\lambda b.3 + 2 \cdot b)((\lambda ab.a + 2 \cdot b)3)5 \rightarrow 3 + 2 \cdot (((\lambda ab.a + 2 \cdot b)3)5) \rightarrow 3 + 2 \cdot ((\lambda b.3 + 2 \cdot b)5) \rightarrow 3 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 5) \rightarrow 29$$

$$(j) (\lambda x.x (x 1))(((\lambda abc.a + b \cdot c)2)4) \rightarrow (((\lambda abc.a + b \cdot c)2)4)((\lambda abc.a + b \cdot c)2)4)1) \rightarrow ((\lambda bc.2 + b \cdot c)4)((\lambda abc.a + b \cdot c)2)4)1) \rightarrow (\lambda c.2 + 4 \cdot c)((\lambda abc.a + b \cdot c)2)4)1) \rightarrow 2 + 4 \cdot (((\lambda abc.a + b \cdot c)2)4)1) \rightarrow 2 + 4 \cdot ((\lambda bc.2 + b \cdot c)4)1) \rightarrow 2 + 4 \cdot ((\lambda c.2 + 4 \cdot c)1) \rightarrow 2 + 4 \cdot (2 + 4 \cdot 1) \rightarrow 2 + 4 \cdot 6 \rightarrow 26$$

$$(k) (\lambda x.x (x 1))(((\lambda abcd.a + b \cdot c - d)2)4)1) \rightarrow (((\lambda abcd.a + b \cdot c - d)2)4)1)((\lambda abcd.a + b \cdot c - d)2)4)1)1) \rightarrow (((\lambda bcd.2 + b \cdot c - d)4)1)((\lambda abcd.a + b \cdot c - d)2)4)1)1) \rightarrow ((\lambda cd.2 + 4 \cdot c - d)1)((\lambda abcd.a + b \cdot c - d)2)4)1)1) \rightarrow ((\lambda d.2 + 4 \cdot 1 - d)((\lambda abcd.a + b \cdot c - d)2)4)1)1) \rightarrow 2 + 4 \cdot 1 - (((\lambda abcd.a + b \cdot c - d)2)4)1)1) \rightarrow 2 + 4 \cdot 1 - ((\lambda cd.2 + 4 \cdot c - d)1)1) \rightarrow 2 + 4 \cdot 1 - ((\lambda d.2 + 4 \cdot 1 - d)1) \rightarrow 2 + 4 \cdot 1 - (2 + 4 \cdot 1 - 1) \rightarrow 2 + 4 \cdot 1 - 5 \rightarrow 1$$